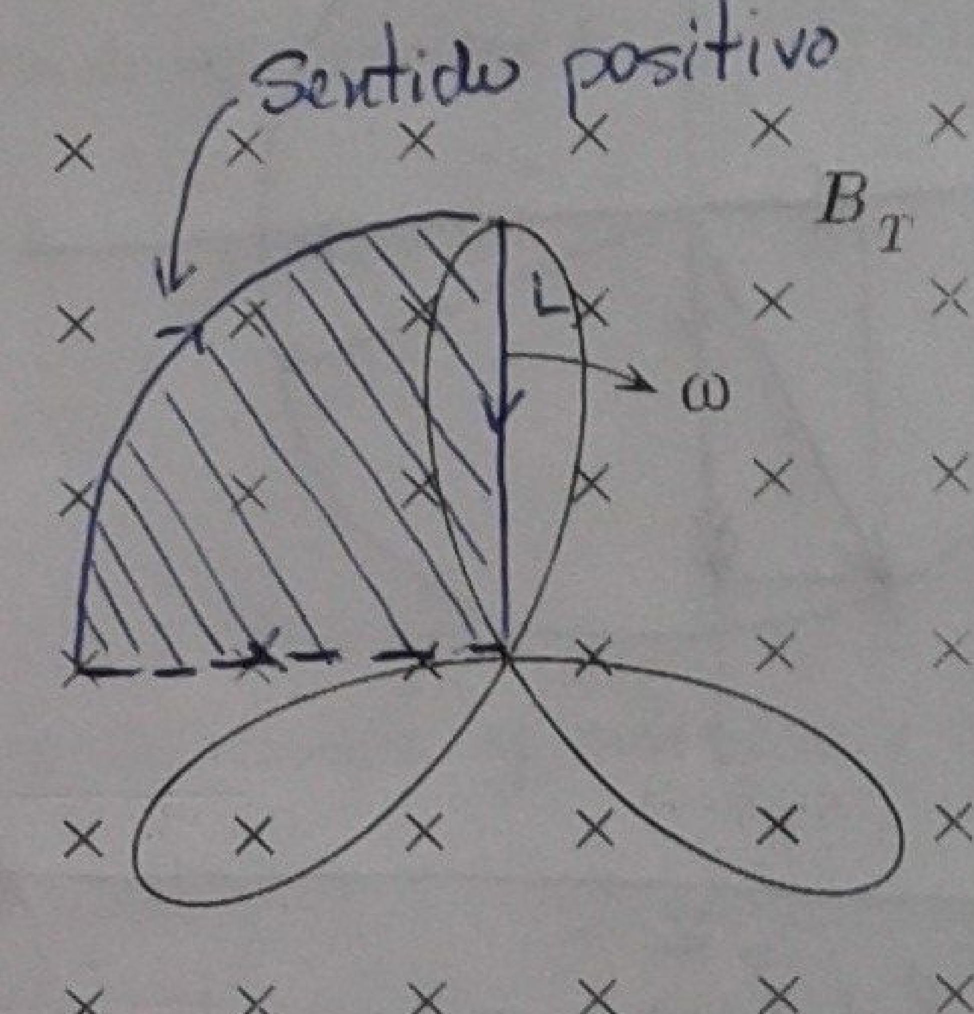
Universidad Simón Bolívar
Departamento de Física

FS2212. 2do Parcial (30 %). Bloque A
Viernes. 19 de Julio de 2013

Nombre ______________________ Carnet ______________

1. [2 *pts.*] La figura muestra las hélices metálicas de un molino de generación eólica de electricidad (que gira por la acción del viento). Cada hélice se puede considerar como una barra conductora de longitud $L = 40\,m$, la cual rota alrededor del eje con velocidad angular ω, en el sentido indicado en la figura y en un plano perpendicular al campo magnético terrestre $\bar{B}_T = 0.5\,G = 5 \times 10^{-5}\,T$ (uniforme). Si la frecuencia de giro de las hélices es $f = 30\,rpm$, la fuerza electromotriz inducida entre los extremos de cada una de ellas será igual a:



(●) $\mathcal{E} = 40\,\pi\,mV$ orientada hacia el borde externo de la hélice

( ) $\mathcal{E} = 40\,\pi\,mV$ orientada hacia el eje de la hélice

( ) $\mathcal{E} = 80\,\pi\,mV$ orientada hacia el borde externo de la hélice

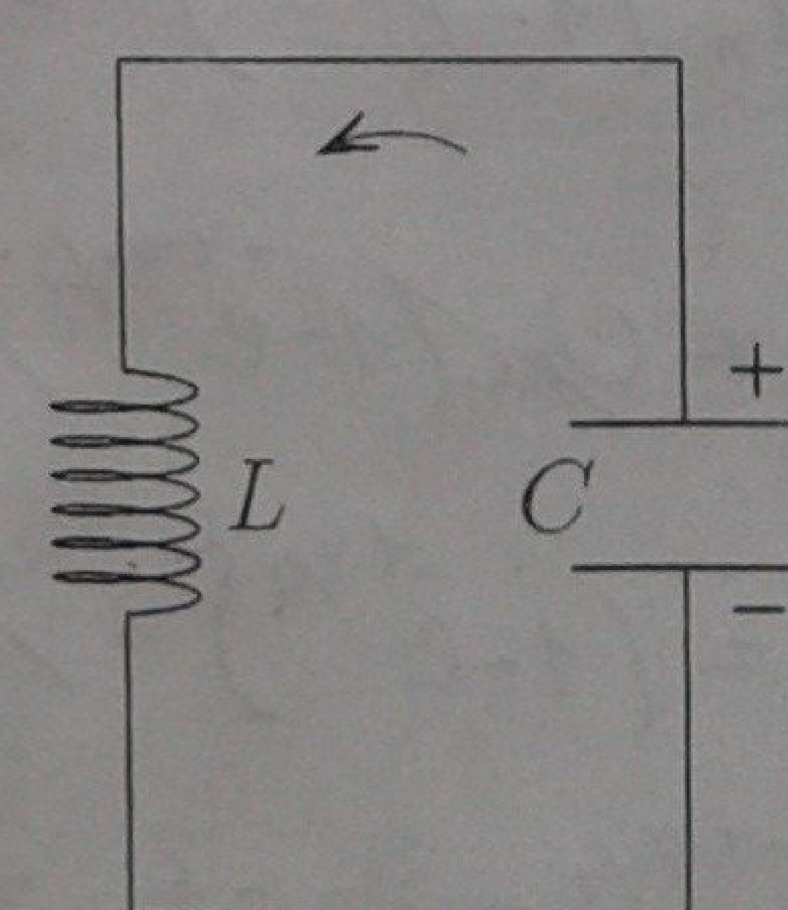
( ) $\mathcal{E} = 80\,\pi\,mV$ orientada hacia el eje de la hélice

( ) $\mathcal{E} = 40\,\pi\,V$ orientada hacia el borde externo de la hélice

$\Phi = \int_0^L \int_0^\phi \bar{B}^\circ \cdot dr\, r\, d\phi\,(-\hat{k}) = B \cdot \phi \frac{1}{2} L^2 \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2} L^2 B \omega \Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{1}{2} L^2 B \omega$ Ahora los valores:

$\mathcal{E} = -\frac{1}{2}(40m)^2 \cdot \frac{1}{2} 10^{-4} T \cdot 30\left(\frac{2\pi}{60}\right)\frac{1}{s} = -\frac{1}{4} \cdot 40 \cdot 40 \cdot \pi \times 10^{-4} \frac{m^2 T}{s} = -10 \cdot 40 \pi \times 10^{-4} V \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = -40\pi\, mV}$

2. [2 *pts.*] En el circuito LC mostrado en la figura, el capacitor C tiene carga Q_0 en $t = 0$, con la polaridad mostrada en la figura, y a través del inductor L circula una corriente I_0, en el sentido indicado en la figura. Sea $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ la frecuencia angular de las oscilaciones. Transcurrido un intervalo de tiempo igual a un cuarto del período ($t = T/4$), los valores respectivos de carga y corriente serán:



( ) $Q(T/4) = -I_0/\omega_0$; $I(T/4) = -\omega_0 Q_0$

( ) $Q(T/4) = -I_0/\omega_0$; $I(T/4) = +\omega_0 Q_0$

(●) $Q(T/4) = +I_0/\omega_0$; $I(T/4) = -\omega_0 Q_0$

( ) $Q(T/4) = -Q_0$; $I(T/4) = -I_0$

( ) $Q(T/4) = +Q_0$; $I(T/4) = +I_0$

$\cancel{q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow q(0) = Q_0 \cos(\phi) \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}}$
$\cancel{i(t) = -Q_0 \omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})}$

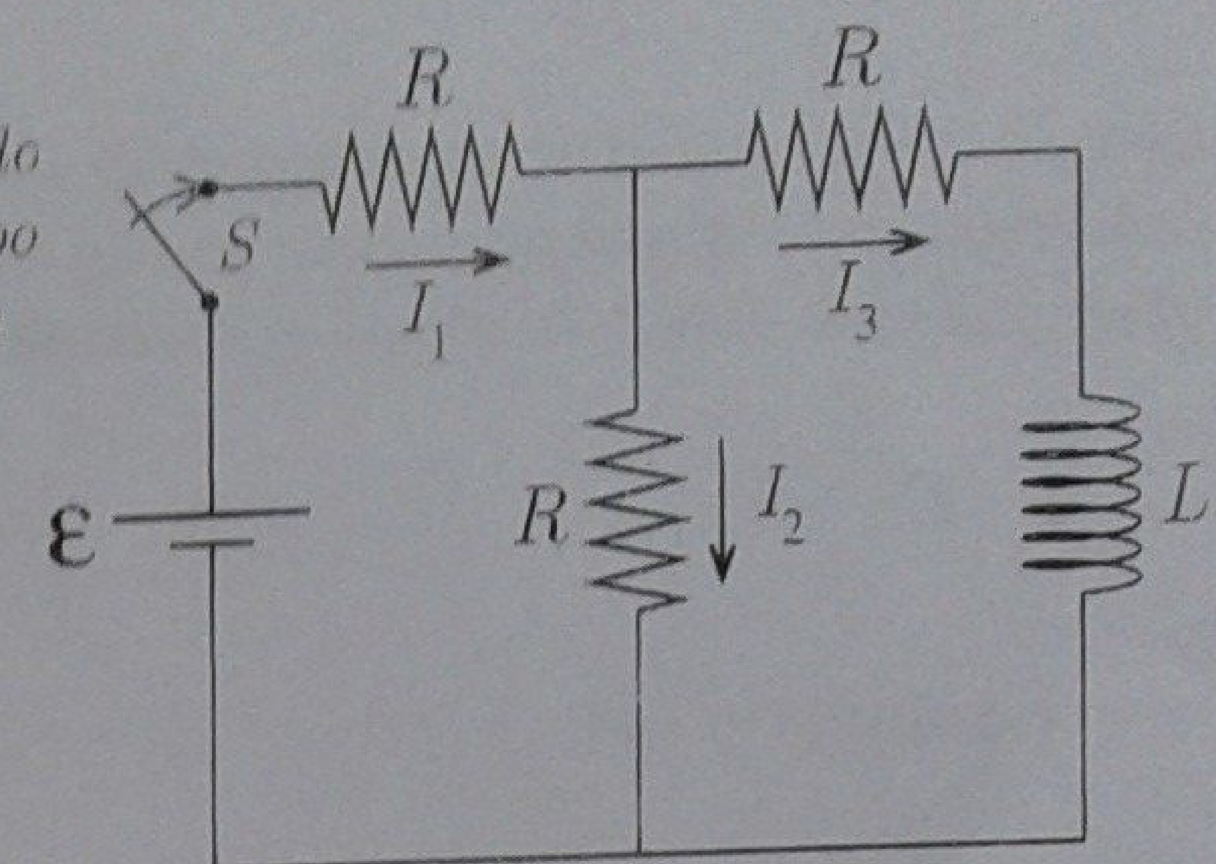
$q(t) = Q_m \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow Q_0 = Q_m \cos(\phi)$ $\boxed{t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{2\omega}}$

$i(t) = -Q_m \omega \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow i_0 = -Q_m \omega \sin(\phi)$

$q(T/4) = Q_m \cos(\omega \frac{\pi}{2\omega} + \phi) = Q_m \cos(\phi + \pi/2) = Q_m(-\sin(\phi)) = -Q_m \sin(\phi) = + i_0/\omega < 0$

$i(T/4) = -\omega Q_m \sin(\omega \frac{\pi}{2\omega} + \phi) = -\omega Q_m \sin(\phi + \frac{\pi}{2}) = -\omega Q_m \cos(\phi) = -Q_0 \omega < 0$

Las siguientes tres preguntas se refieren al circuito mostrado en la figura. El interruptor S ha estado abierto largo tiempo y se cierra en $t=0$. Las tres resistencias son iguales a R y la inductancia vale L. El voltaje de la batería DC es $\mathcal{E}$. Sean I_1, I_2 e I_3 las corrientes respectivas a través de las resistencias, tales como se indica en la figura.



- **La constante de tiempo del circuito es** $\boxed{\tau = 2L/3R}$ (no pierda tiempo calculándola).

3. [2 *pts.*] Justo después de cerrar el interruptor, los valores respectivos de las corrientes I_1, I_2 e I_3 son:

( ) $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{R}$; $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{2R}$; $I_3 = \dfrac{\mathcal{E}}{2R}$

(●) $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{2R}$; $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{2R}$; $I_3 = 0$

( ) $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{3R}$; $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{3R}$; $I_3 = \dfrac{\mathcal{E}}{3R}$

( ) $I_1 = \dfrac{2\mathcal{E}}{3R}$; $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{3R}$; $I_3 = \dfrac{\mathcal{E}}{3R}$

( ) $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{2R}$; $I_2 = 0$; $I_3 = \dfrac{\mathcal{E}}{2R}$

La fem en L implica que $i_3=0 \Rightarrow i_2=i_1$ y la conservación de carga y energía implica

$$\mathcal{E}-i_1R-i_1R=0 \Rightarrow \mathcal{E}-2i_1R=0 \Rightarrow \boxed{i_1=i_2=\frac{\mathcal{E}}{2R}\ ;\ i_3=0}$$

4. [2 *pts.*] Transcurrido un tiempo muy largo luego de haber cerrado el interruptor, los valores de las corrientes I_1, I_2 e I_3 son, respectivamente:

( ) $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{R}$; $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{2R}$; $I_3 = \dfrac{\mathcal{E}}{2R}$

( ) $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{2R}$; $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{2R}$; $I_3 = 0$

( ) $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{3R}$; $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{3R}$; $I_3 = \dfrac{\mathcal{E}}{3R}$

(●) $I_1 = \dfrac{2\mathcal{E}}{3R}$; $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{3R}$; $I_3 = \dfrac{\mathcal{E}}{3R}$

( ) $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{2R}$; $I_2 = 0$; $I_3 = \dfrac{\mathcal{E}}{2R}$

En este caso $\mathcal{E}_L=0 \Rightarrow$ si usamos la conservación de la carga $i_1=i_2+i_3$

$$\left|\begin{array}{l}\mathcal{E}-i_1R-i_2R=0\\ \mathcal{E}-i_1R-i_3R=0\end{array}\right. \begin{array}{l}\Rightarrow 2\mathcal{E}-2i_1R-(i_2+i_3)R=0 \Rightarrow 2\mathcal{E}-3i_1R \Rightarrow \boxed{i_1=\tfrac{2}{3}\mathcal{E}/R}\\ \Rightarrow (i_2-i_3)R=0 \Rightarrow i_2=i_3 \Rightarrow \boxed{i_2=i_3=\tfrac{1}{3}\mathcal{E}/R}\end{array}$$

5. [2 *pts.*] El tiempo $t_{4/9}$ transcurrido desde que se cierra el interruptor hasta que el inductor llega a acumular 4/9 de la energía máxima es:

( ) $t_{4/9} = \dfrac{L}{R}\ln\left(\dfrac{4}{9}\right)$

( ) $t_{4/9} = \dfrac{2L}{3R}\ln(2)$

(●) $t_{4/9} = \dfrac{2L}{3R}\ln(3)$

( ) $t_{4/9} = \dfrac{4L}{3R}\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$

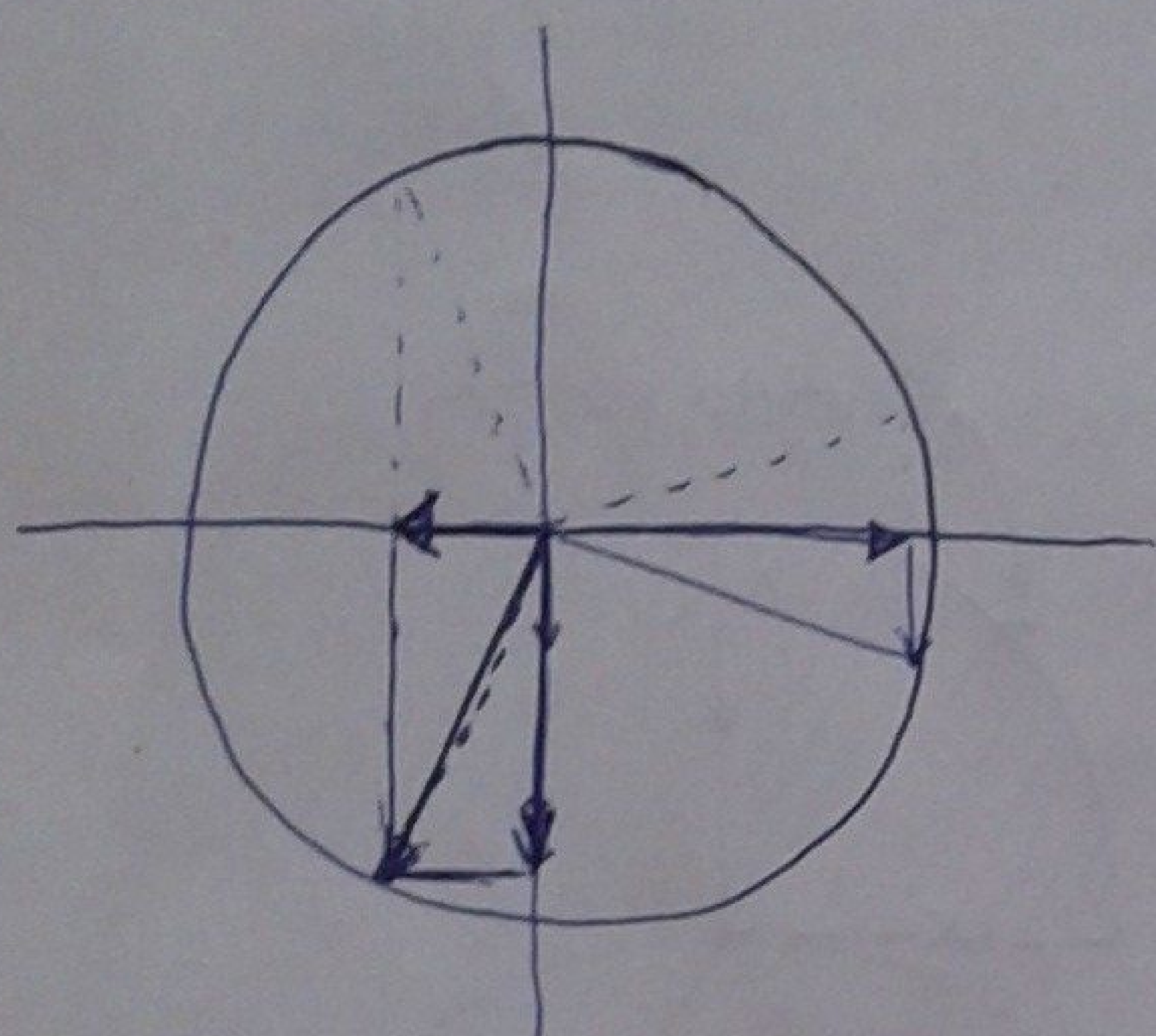
( ) $t_{4/9} = \dfrac{L}{R}\ln(3)$

(2) $q(t) = Q_m \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow Q_0 = Q_m \cos(\phi) \Rightarrow \omega Q_0 = \omega Q_m \cos(\phi)$

$i(t) = -Q_m \omega \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow i_0 = \omega Q_m(-\sin\phi) \Rightarrow i_0/\omega = -Q_m \sin(\phi)$

$q(T/4) = Q_m \cos\left(\omega \frac{2\pi}{4\omega} + \phi\right) = Q_m \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) = -Q_m \sin(\phi) = i_0/\omega < 0$

$i(T/4) = -Q_m \omega \sin\left(\omega \frac{2\pi}{4\omega} + \phi\right) = -Q_m \omega \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) = -Q_m \omega \cos(\phi) = -\omega Q_0 < 0$



---

5) $U_m = \frac{1}{2} L i(t)^2 \Rightarrow U_m = \frac{1}{2} L (i_m)^2$

i_m es la corriente 3 despues de transcurrido un tiempo muy largo

$i_m = \frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow U_m = \frac{1}{2} L \left(\frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{R}\right)^2$

$i(t) = i_m(1 - e^{-t/\tau}) \Rightarrow U(t) = \frac{1}{2} L (i_m)^2 (1 - e^{-t/\tau})^2 = U_m (1 - e^{-t/\tau})^2$

$U(t_{4/9}) = \cancel{U_m}(1 - e^{-t_{4/9}/\tau})^2 = \frac{4}{9} \cancel{U_m}$

$= (1 - e^{-t_{4/9}})^2 = 4/9 \Rightarrow 1 - e^{-t_{4/9}/\tau} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$e^{-t_{4/9}/\tau} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} \Rightarrow e^{-t_{4/9}} = \frac{1}{3} \Rightarrow e^{t_{4/9}/\tau} = 3$

$t_{4/9}/\tau = \ln(3) \Rightarrow t_{4/9} = \tau \ln(3) \Rightarrow \boxed{t_{4/9} = \frac{2L}{3R} \ln(3)}$

6. [10 *pts.*] Una lámina conductora delgada, de ancho W se dobla de manera que la banda central queda en forma de cilindro de radio $a \ll W$ mientras que el resto queda como dos semiplanos paralelos, separados por una brecha de grosor despreciable, como se muestra en la figura. A través del semiplano superior, entra una corriente variable

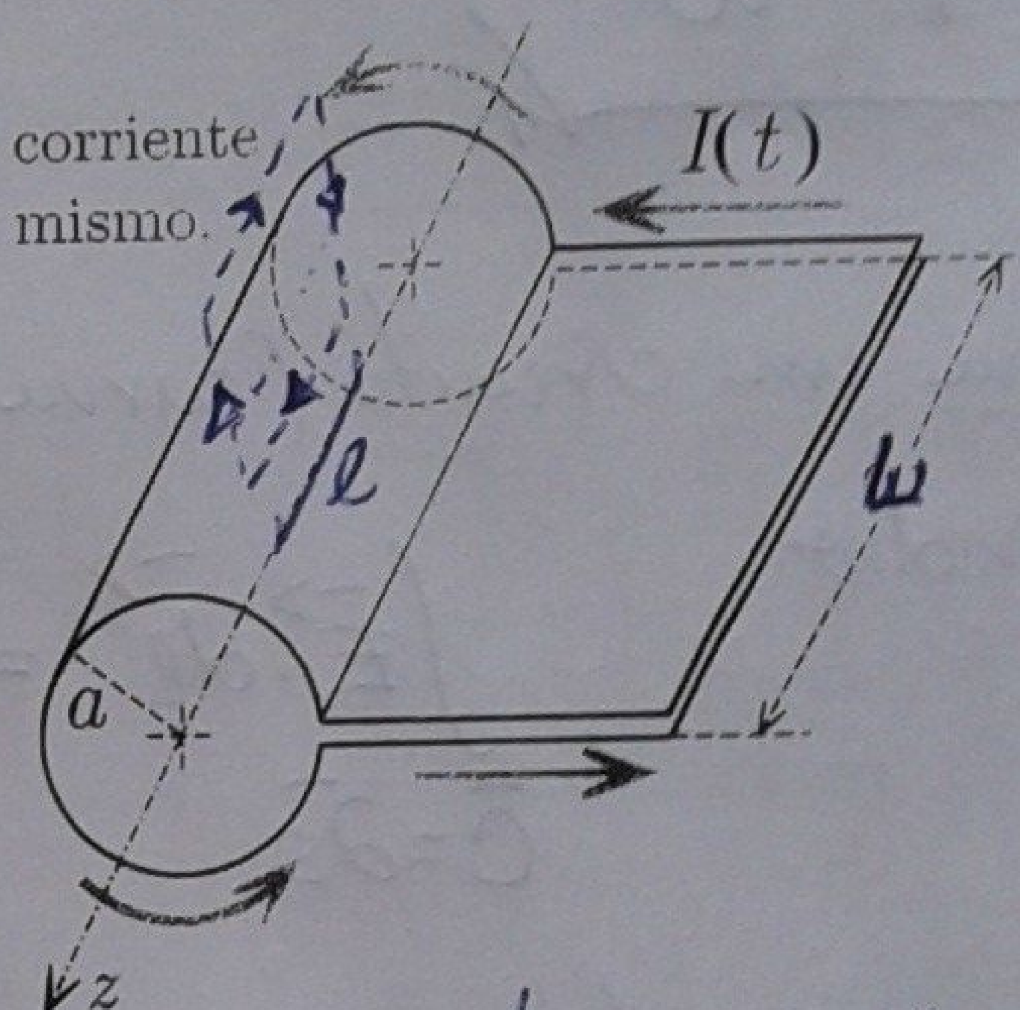
$$\boxed{I(t) = I_0 \exp(-t/\tau)\,,}$$

donde I_0 y τ son constantes positivas conocidas; a continuación, la corriente rodea el cilindro y sale de nuevo por el semiplano inferior, como se indica en la figura.

(a) [3 *pts.*] Escriba la expresión para la densidad superficial de corriente en el cilindro, y calcule el campo magnético $\vec{B}$ adentro del mismo.

(b) [3 *pts.*] Calcule la energía magnética U_B almacenada en el cilindro, y la autoinductancia del mismo.

(c) [4 *pts.*] Calcule el campo eléctrico $\vec{E}$ inducido adentro del cilindro.



a) $I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ la densidad superficial de corriente en cualquier punto de la lámina será: $K = \frac{I(t)}{L} = \frac{I_0}{W} e^{-t/\tau}$

Siguiendo la Ley de Ampere

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

i) $I_{enc} = K\cdot l$

ii) $d\vec{l}$ se orienta según el dibujo para que coincida con la dirección del campo

iii) $\vec{B}$ es uniforme según argumentos de simetría similares a los usados para el solenoide largo.

$$Bl = \mu_0 \frac{I_0}{W} e^{-t/\tau}\cdot l \Rightarrow \boxed{\vec{B}(t) = \mu_0 \frac{I_0}{W} e^{-t/\tau}\hat{k}}$$

b) $U = \int_{Vol} u\cdot dv$ $\quad u = \frac{1}{2\mu_0}(\vec{B})^2 = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{I_0^2}{W^2} e^{-2t/\tau}$ $\boxed{Vol}$ es uniforme $\Rightarrow$

$$U = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{I_0^2}{W^2} e^{-2t/\tau}(\pi a^2 W) \Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{I_0^2}{W}\pi a^2 e^{-2t/\tau}}$$

Simultaneamente, y tomando en cuenta que el campo es nulo fuera del cilindro

$$U = \frac{1}{2} L(I(t))^2 = \frac{1}{2} L\left(I_0^2 e^{-2t/\tau}\right) = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{\pi a^2}{w}\left(I_0^2 e^{-2t/\tau}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{L = \mu_0 \frac{\pi a^2}{w}}$$

c) Para un circuito (curva orientada) cualquiera $\vec{C}$ dentro del cilindro

$$\int_{\bar{C}=\partial\bar{S}} \vec{E}\cdot\vec{dl} = \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{\bar{S}} \vec{B}\cdot\vec{dS}$$

La simetría sugiere un círculo de radio $r \leq a$ perpendicular al eje del cilindro.

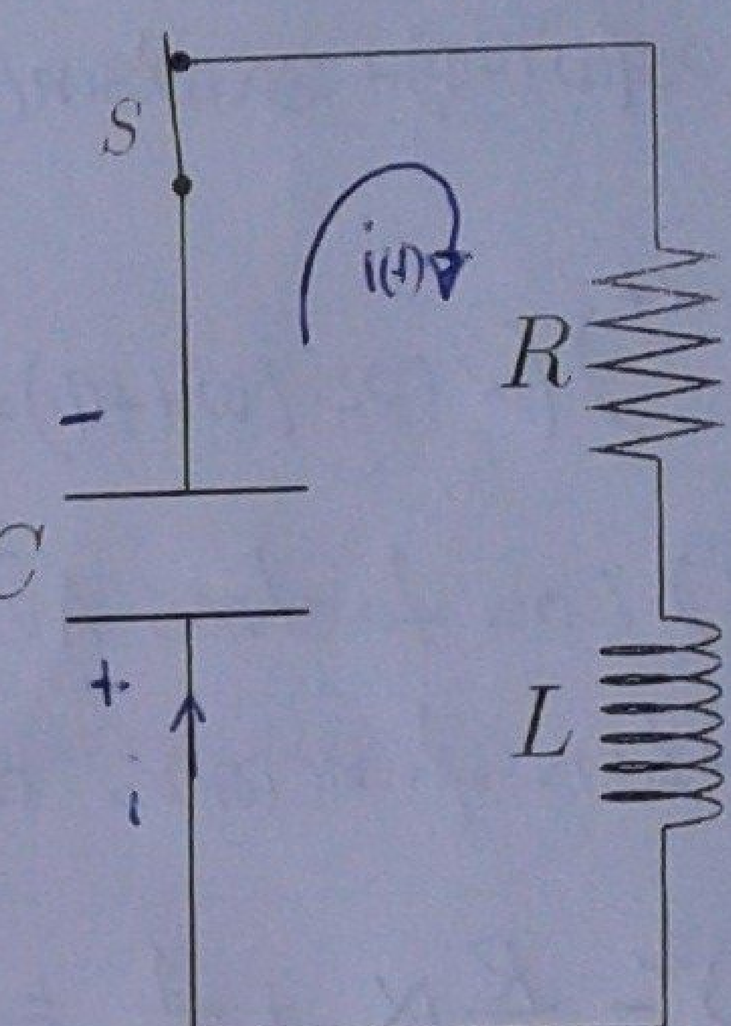
$$\vec{E} = E(r)\hat{\varphi} \qquad \vec{dl} = r\,d\varphi\,\hat{\varphi} \Rightarrow \vec{dS} = r\,d\varphi\,dr\,\hat{k} \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi} E(r)\hat{\varphi}\cdot r\,d\varphi\,\hat{\varphi} = -\frac{d}{dt}\left(\int_0^{r}\int_0^{2\pi} \mu_0 \frac{I_0}{w} e^{-t/\tau}\hat{k}\cdot r\,d\varphi\,dr\,\hat{k}\right) \Rightarrow$$

$$E(r)\cancel{2\pi r} = -\frac{d}{dt}\mu_0 \frac{I_0}{w} e^{-t/\tau}\cancel{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\cancel{r}^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{\mu_0}{2}\frac{I_0}{w\tau} e^{-t/\tau}\, r\,\hat{\varphi}}$$

7. [10 *pts.*] Se tiene un circuito RLC, en serie, cuyos valores de inductancia L y de capacitancia C son conocidos y permanecen fijos. La resistencia R puede ajustarse, pero se supondrá también conocida para efectos de los cálculos. El capacitor tiene una carga inicial Q_0, estando el interruptor S abierto. En $t = 0$, el interruptor se cierra [$I(0) = 0$].



(a) [2 *pts.*] Escriba la ecuación de malla del circuito y deduzca, a partir de la misma, la ecuación diferencial que satisface la carga del capacitor como función del tiempo.

- **Sugerencia:** Puede usar la notación abreviada

$$\boxed{\tau_L = L/R,\ \tau_c = RC \ \text{ y } \ \omega_0^2 = 1/LC}$$

(b) [4 *pts.*] Demuestre que la solución a la ecuación diferencial puede escribirse de la siguiente forma:

$$\boxed{Q(t) = A e^{-\alpha t} \cos(\omega' t + \phi_0),}$$

donde A, α, ω' y ϕ_0 son constantes por determinar.
Determine las constantes α y ω' en función de R, L y C.

(c) [2 *pts.*] Determine el máximo valor para R, en función de L y C, tal que la constante ω' sea real.

(d) [2 *pts.*] Determine las constantes A y ϕ_0 que satisfacen las condiciones iniciales,

$$\boxed{I(0) = 0 \ \text{ y } \ Q(0) = Q_0}$$

Usando el instante de la figura

a)
$$\begin{cases} -\dfrac{q(t)}{C} - i(t)R - \dfrac{di(t)}{dt}L = 0 \\[2ex] \dfrac{dq(t)}{dt} = i(t) \end{cases}$$

Esta determinada por la conservación de la energía.

Esta determinada por la conservación de la carga.

Con estas dos ecuaciones
$$\boxed{\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq(t)}{dt} + \frac{L}{LC}q(t) = 0}$$

Con las constantes sugeridas
$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}q(t) + \frac{1}{\tau_L}\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_c}q(t) = 0}$$

b) Si $q(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(w't + \varphi_0)$ es solución, entonces satisface la ecuación al substituir.

$$\frac{dq}{dt} = Ae^{-\alpha t}(-\alpha)\cos(w't+\phi) + Ae^{-\alpha t}(-w')\sin(w't+\phi) = -Ae^{-\alpha t}(\alpha\cos(w't+\phi)+w'\sin(w't+\phi))$$

$$\frac{d^2q}{dt} = A\alpha e^{-\alpha t}(\alpha\cos(w't+\phi)+w'\sin(w't+\phi)) - Ae^{-\alpha t}(-\alpha w'\sin(w't+\phi)+w'^2\cos(w't+\phi))$$

La ecuación aplicada a nuestro candidato a solucion es:

$$Ae^{-\alpha t}\left[\alpha^2\cos(w't+\phi)+2\alpha w'\sin(w't+\phi)-w'^2\cos(w't+\phi)\right] +$$

$$\frac{R}{L}(-Ae^{-\alpha t})(\alpha\cos(w't+\phi)+w'\sin(w't+\phi)) + \frac{1}{LC}Ae^{-\alpha t}\cos(w't+\phi) = 0$$

i) Los factores $Ae^{-\alpha t} \neq 0$ para todo tiempo finito.

ii) Las funciones cos y sin son <u>independientes</u> $\Rightarrow$ Solo se anula si:

$$\begin{cases} \alpha^2 - w'^2 - \frac{R}{L}\alpha + \frac{1}{LC} = 0 & \text{(coeficientes del } \cos(w't+\phi)) \\ 2\alpha w' - \frac{R}{L}w' = 0 & \text{(coeficientes del } \sin(w't+\phi)) \end{cases}$$

Si $w' \neq 0$ la segunda ecuación implica $\boxed{\alpha = \frac{R}{2L}}$ y de aquí

$$w'^2 = \frac{R^2}{4L^2} - \frac{R^2}{2L^2} + \frac{1}{LC} \Rightarrow \boxed{w'^2 = \frac{1}{LC} - \frac{1}{4}\frac{R^2}{L^2}}$$

Note que esta solución es valida solo si $\frac{1}{LC} - \frac{1}{4}\frac{R^2}{L^2} > 0 \Rightarrow$

c) $\frac{1}{LC} > \frac{1}{4}\frac{R^2}{L^2} \Rightarrow \boxed{\sqrt{4\frac{L}{C}} > R}$ es el máximo valor de R.

d) $q(0) = Q_0$ y $i(0) = 0 \Rightarrow A\cos(\phi) = Q_0$; $-A(\alpha\cos(\phi)+w'\sin(\phi)) = 0$

$\Rightarrow \alpha Q_0 + w'A\sin\phi = 0 \Rightarrow \boxed{A\sin\phi = -\frac{\alpha}{w'}Q_0} \Rightarrow$

$$\boxed{tg(\phi) = -\frac{\alpha}{w'}}$$

$$A^2\cos^2\phi + A^2\sin^2\phi = Q_0^2 + \frac{\alpha^2}{w'^2}Q_0^2 \Rightarrow \boxed{A^2 = Q_0^2\left(1+\frac{\alpha^2}{w'^2}\right)}$$